

NCCI: Pružný kritický moment na konzole

Tento NCCI dokument se zabývá jednoduchou metodou pro výpočet kritického momentu konzolového nosníku.

Obsah

1.	Oblast platnosti	
2.	Výpočet M_{cr}	2
3.	Tabulky pro součinitele C	3
4.	Za tepla válcované I profily: návrhové pomůcky pro $M_{cr,0}$ a κ_{wt}	10
5.	Příklady použití	11
6.	Informace o freewarovém programu LTBeam pro řešení obecných LTB problémů	12
7.	Literatura	12

1. Oblast platnosti

Tento NCCI dokument poskytuje informace o konzolových nosnících splňující následující podmínky:

- Nosník má homogenní oboustranně symetrický průřez
- Nosník je po délce nepodepřený vyjma koncové podpory
- Nosník je v podpoře vetknutý na kroucení
- Působící zatížení vyvozují ohyb okolo hlavní osy symetrie. Zatížení působí ve stejné rovině, ve které se nachází střed smyku (působí nad, pod či v místě středu smyku)
- Příznivý efekt průhybu působícího v rovině ohybu není uvažován (nosník je uvažován jako přímý v rovině působícího zatížení jež vyvolává ztrátu příčné a torzní stability)
- Normálové síly jsou zanedbány

Poznámka: Řešení pro případy, kde je na konci nosníku zamezeno zkroucení či příčnému vybočení je možné nalézt ve specifické literatuře (detailní informace je možné najít např. ve Swedish Manual on Buckling [4]). Pro tyto příklady a mnoho dalších, které nejsou předmětem tohoto NCCI dokumentu je možné nalézt oporu ve specifickém software, stejně jako v příkladu presentovaném v sekci 6.

2. Výpočet M_{cr}

Kritická hodnota M_{cr} pro maximální moment M v podpoře konzolového nosníku je dána:

$$M_{cr} = C \cdot M_{cr,0} \quad (1)$$

kde

$M_{cr,0}$ je pružný kritický moment pro ztrátu příčné a torzní stability prostě podepřeného nosníku (s “vidlicovým” podepřením na koncích) zatížený konstantním momentem. Tuhost nosníku ve zkroucení je zanedbána.

C je globální součinitel jež bere v úvahu následující vlivy:

- rozložení momentů po délce průřezu t.j. tvar momentového obrazce,
- tuhost nosníku v kroucení,
- zavedení zatížení nad nebo pod centrem smyku, jež se zde shoduje s těžištěm průřezu a
- omezení v podporách (deplanace)

$M_{cr,0}$ je definováno vztahem:

$$M_{cr,0} = \frac{\pi}{L} \cdot \sqrt{E I_z G I_t} \quad (2)$$

ve kterém je

- L délka konzolového nosníku
- E Youngův modul pružnosti
- G modulu tuhosti ve smyk
- I_t moment tuhosti v kroucení
- I_z je moment setrvačnosti kolem osy menší tuhosti

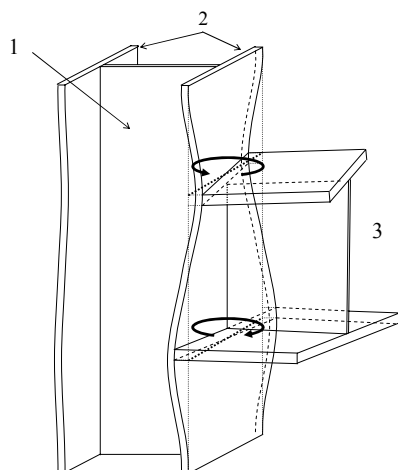
3. Tabulky pro součinitele C

Hodnoty součinitele C byly vypočteny pro mnoho případů za použití specifického softwarového programu pro výpočet ztráty příčné a torzní stability **LTBeam** (viz sekce 6), a tabulky uvedené níže jsou vypracovány pro přímé použití při navrhování.

V podpoře byly uvažovány dva případy pro zabránění deplanace:

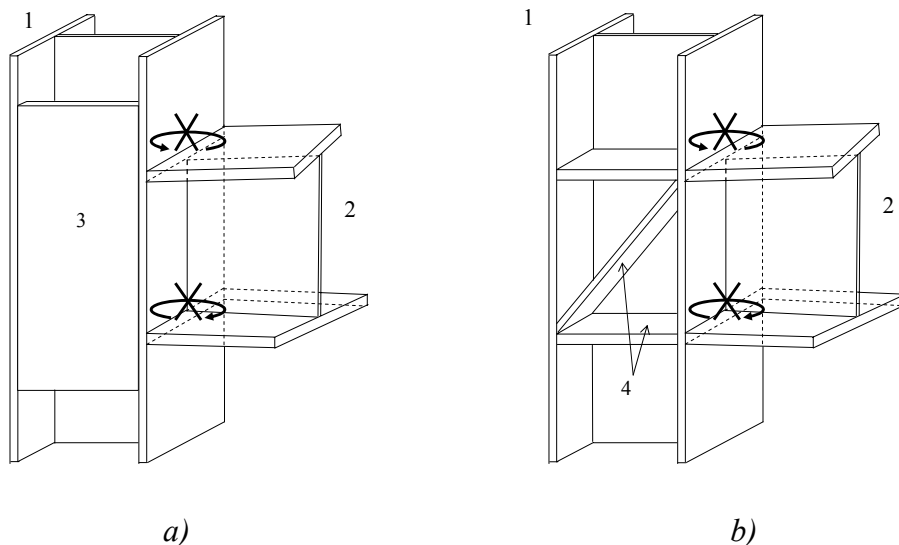
- deplanaci není bráněno
- deplanaci je plně zabráněno

Při praktickém navrhování není nikdy deplanaci úplně zabráněno nebo naopak. Ke kterému z případů se projektant přikloní záleží na detailu připojení v podepření. Na Obr 3.1 a **Chyba! Nenalezen zdroj odkazů.** jsou ukázány případy, pro které je možné uvažovat, že deplanaci bráněno není a pro které naopak se uvažuje, že bráněno deplanaci je. *Jestliže existují pochybnosti o účinnosti zabránění deplanace průřezu, je doporučeno uvažovat, že zabráněno deplanaci není.*



- 1 Sloup
- 2 Tenké pásnice
- 3 Konzolový nosník (namáhaný na klopení)

Obr 3.1 Případ, kdy v podpoře není zabráněno deplanaci



- 1 Sloup
- 2 Konzolový nosník (namáhaný na klopení)
- 3 Výztužný plech (na obou stranách)
- 4 Výztuhy (na obou stranách)

Obr 3.2 Případ, kdy v podpoře je zabráněno deplanaci

Pro dané zatížení a podepření nosníku s ohledem na deplanaci průřezu součinitel C závisí na dvou parametrech:

- Parametr κ_{wt} pro stanovení tuhosti ve vetknutí zabraňující deplanaci průřezu

$$\kappa_{wt} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{EI_w}{GI_t}} \quad (3)$$

kde

I_w je výsečový moment setrvačnosti průřezu

- a parametr η pro stanovení stabilizačního či destabilizačního účinku zatížení působícího nad nebo pod úrovní středu smyku

$$\eta = \frac{z_a}{h_s/2} \quad (\text{parametru } \eta \text{ je přiřazena znaménková konvence vysvětlená níže}) \quad (4)$$

kde :

z_a je vzdálenost působícího zatížení od středu smyku

h_s je definováno **konvencí** jako:

$$h_s = 2\sqrt{\frac{I_w}{I_z}} \quad (5)$$

pro jakýkoliv tvar průřezu.

Pro dvouose symetrické I průřezy může být h_s uvažováno jako vzdálenost mezi středy smyku pásnic:

$$h_s = h - t_f$$

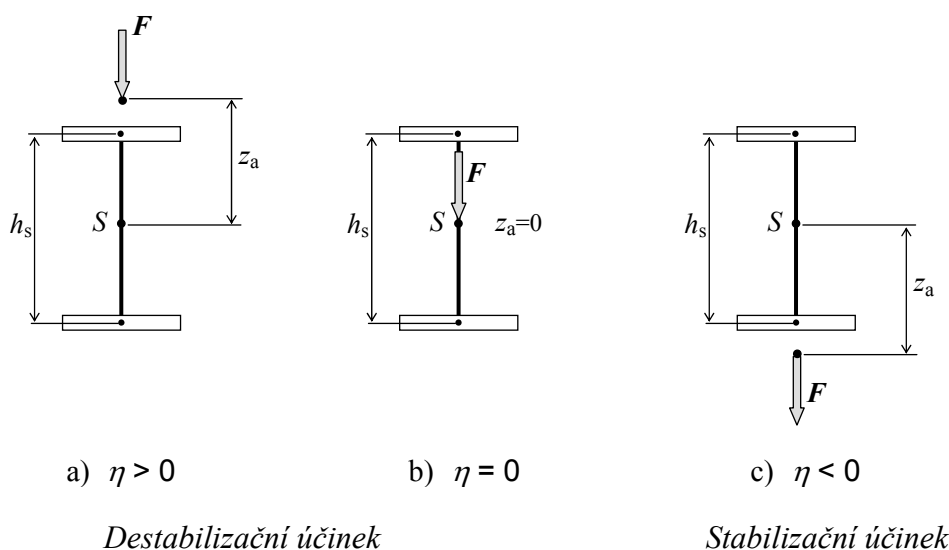
h je celková výška průřezu

t_f je tloušťka pásnic

Znaménko součinitele η

Znaménková konvence pro η je zobrazena na Obr 3.3. Pro zatížení působící ve středu smyku S daného průřezu, $z_a = 0$ a $\eta = 0$. Jinak znaménko pro η závisí na efektu zatížení když uvažujeme že úhel zkroucení z důvodu klopení průřezu způsobí:

- jakékoliv zatížení působící ve směru do středu smyku S vyvodí kroučící moment který zvětší úhel zkroucení: zatížení má **destabilizující** účinek (případ a) a hodnota η je dle konvence **kladná**,
- naproti tomu, jakékoliv zatížení působící směrem od středu smyku S vyvodí kroučící moment který bude působit proti úhlu zkroucení: zatížení má potom **stabilizující** účinek (případ c) a hodnota η je dle konvence **záporná**.



Obr 3.3 Případ pro “omezující” účinky deplanace v podpoře

Hodnoty pro součinitel C jsou uvedeny pro následující tři jednoduchá schémata zatížení:

- spojitě rovnoměrné zatížení q podél nosníku
- bodové zatížení F působící na volném konci nosníku
- vnější moment C_M působící na volném konci nosníku

Hodnoty součinitelů κ_{wt} a η se vyskytují mezi následujícími krajními hodnotami (většina praktických případů):

$$0 \leq \kappa_{wt} \leq 1$$

$$-2 \leq \eta \leq 3$$

Hodnoty C pro mezilehlé hodnoty těchto parametrů je možné získat interpolací.

3.2 Součinitel C pro jednoduché případy zatížení

Tab. 3.1 hodnoty C pro rovnoměrné zatížení q

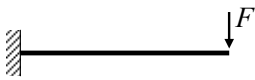


		stabilizační účinek * ←				η	⇒ destabilizační účinek **								
		-2,00	-1,50	-1,00	-0,50	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	2,00	2,50	3,00
Deplaneci není bráněno	κ_{wt}														
	0	2,04	2,04	2,04	2,04	2,04	2,04	2,04	2,04	2,04	2,04	2,04	2,04	2,04	2,04
	0,05	2,42	2,34	2,25	2,16	2,06	2,02	1,97	1,92	1,87	1,82	1,77	1,67	1,58	1,49
	0,1	2,87	2,71	2,53	2,34	2,13	2,03	1,92	1,82	1,71	1,61	1,52	1,35	1,20	1,07
	0,15	3,37	3,14	2,87	2,56	2,22	2,05	1,87	1,71	1,56	1,42	1,30	1,09	0,93	0,81
	0,2	3,93	3,62	3,25	2,82	2,32	2,06	1,82	1,60	1,41	1,25	1,12	0,91	0,76	0,65
	0,3	5,13	4,67	4,11	3,39	2,50	2,06	1,69	1,39	1,17	0,99	0,86	0,68	0,55	0,47
	0,4	6,40	5,79	5,04	4,02	2,66	2,02	1,54	1,21	0,98	0,81	0,70	0,54	0,43	0,36
	0,6	9,07	8,16	7,04	5,38	2,88	1,85	1,26	0,92	0,72	0,59	0,50	0,38	0,30	0,25
	0,8	11,8	10,6	9,11	6,82	3,00	1,65	1,03	0,73	0,56	0,46	0,38	0,29	0,23	0,19
	1	14,6	13,1	11,2	8,30	3,08	1,47	0,87	0,61	0,46	0,37	0,31	0,23	0,19	0,16
Zamezeno deplanaci	0	2,04	2,04	2,04	2,04	2,04	2,04	2,04	2,04	2,04	2,04	2,04	2,04	2,04	2,04
	0,05	2,81	2,71	2,61	2,50	2,39	2,33	2,27	2,21	2,15	2,09	2,04	1,92	1,81	1,70
	0,1	3,76	3,55	3,33	3,07	2,80	2,65	2,51	2,36	2,22	2,08	1,95	1,72	1,52	1,35
	0,15	4,80	4,50	4,15	3,72	3,23	2,97	2,71	2,47	2,23	2,03	1,84	1,54	1,31	1,13
	0,2	5,91	5,51	5,03	4,42	3,68	3,28	2,89	2,53	2,22	1,96	1,74	1,40	1,17	1,00
	0,3	8,22	7,63	6,91	5,93	4,57	3,82	3,14	2,59	2,16	1,84	1,59	1,24	1,02	0,86
	0,4	10,6	9,82	8,87	7,52	5,45	4,29	3,32	2,62	2,13	1,78	1,52	1,17	0,95	0,79
	0,6	15,5	14,3	12,9	10,8	7,15	5,10	3,65	2,74	2,17	1,78	1,51	1,15	0,92	0,77
	0,8	20,4	18,9	17,0	14,2	8,85	5,92	4,05	2,98	2,33	1,90	1,60	1,22	0,98	0,82
		1	25,4	23,5	21,1	17,6	10,6	6,80	4,54	3,30	2,57	2,09	1,76	1,33	1,07

*pro gravitační zatížení, zatížení působící pod středem smyku

** pro gravitační zatížení, zatížení působící nad středem smyku

Tab. 3.2 hodnoty C pro bodové zatížení F působící na volném konci

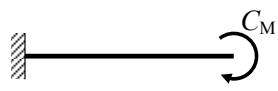


		stabilizační účinek ←				η	→ destabilizační účinek								
		-2,00	-1,50	-1,00	-0,50	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	2,00	2,50	3,00
Deplaneci není bráněno	K_{wt}														
	0	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27
	0,05	1,39	1,37	1,34	1,31	1,28	1,26	1,25	1,23	1,21	1,19	1,17	1,13	1,08	1,04
	0,1	1,52	1,48	1,43	1,37	1,30	1,27	1,23	1,18	1,14	1,10	1,05	0,96	0,87	0,79
	0,15	1,65	1,60	1,53	1,45	1,34	1,27	1,21	1,13	1,06	0,99	0,92	0,80	0,69	0,61
	0,2	1,80	1,74	1,66	1,54	1,38	1,28	1,18	1,07	0,97	0,88	0,80	0,67	0,56	0,49
	0,3	2,15	2,07	1,94	1,75	1,45	1,27	1,10	0,94	0,81	0,70	0,61	0,49	0,40	0,34
	0,4	2,54	2,44	2,27	1,99	1,52	1,24	1,00	0,81	0,67	0,56	0,49	0,38	0,31	0,26
	0,6	3,41	3,26	3,01	2,52	1,60	1,14	0,81	0,61	0,49	0,40	0,34	0,26	0,21	0,17
	0,8	4,33	4,14	3,81	3,09	1,65	1,02	0,67	0,49	0,38	0,31	0,26	0,20	0,16	0,13
1	5,29	5,06	4,63	3,70	1,68	0,91	0,57	0,40	0,31	0,25	0,21	0,16	0,13	0,11	
Zamezeno deplanaci	0	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27
	0,05	1,55	1,52	1,49	1,45	1,42	1,40	1,37	1,35	1,33	1,31	1,28	1,24	1,19	1,14
	0,1	1,86	1,81	1,75	1,67	1,58	1,54	1,48	1,43	1,37	1,31	1,25	1,13	1,02	0,92
	0,15	2,20	2,13	2,04	1,93	1,77	1,68	1,58	1,47	1,36	1,26	1,16	0,99	0,85	0,74
	0,2	2,56	2,48	2,37	2,21	1,96	1,81	1,65	1,48	1,32	1,18	1,06	0,86	0,72	0,62
	0,3	3,36	3,26	3,10	2,82	2,35	2,03	1,72	1,44	1,21	1,04	0,90	0,71	0,58	0,49
	0,4	4,21	4,08	3,88	3,49	2,72	2,21	1,75	1,39	1,14	0,95	0,82	0,63	0,51	0,43
	0,6	5,99	5,82	5,52	4,90	3,46	2,53	1,84	1,39	1,10	0,91	0,77	0,59	0,47	0,40
	0,8	7,83	7,61	7,22	6,36	4,20	2,88	2,00	1,48	1,16	0,95	0,80	0,61	0,49	0,41
	1	9,69	9,43	8,94	7,84	4,98	3,27	2,21	1,62	1,26	1,03	0,86	0,66	0,53	0,44

*pro gravitační zatížení, zatížení působící pod středem smyku

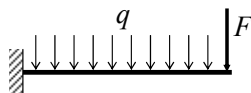
** pro gravitační zatížení, zatížení působící nad středem smyku

Tab. 3.3 hodnoty součinitele C pro koncový moment C_M působící na volném konci konzoly



		K_{wt}									
		0	-0,05	0,1	0,15	0,2	0,3	0,4	0,6	0,8	1
Deplaneci není bráněno		0,50	0,50	0,50	0,51	0,51	0,52	0,53	0,54	0,54	0,54
Zamezeno deplanaci		0,50	0,50	0,50	0,51	0,52	0,55	0,59	0,68	0,80	0,93

3.3 Součinitel C pro kombinaci q a F



Obr 3.4 Kombinace q a F

Pro každou kombinaci

- rovnoměrného zatížení q působícího podélně na nosníku,
- a bodového zatížení F působícího na volném konci nosníku,

splňující podmínky uvedené níže:

- obě zatížení působí stejným směrem a
- jestliže jsou aplikovány mimo střed smyku, pro obě zatížení platí stejně $\eta \geq 0$ nebo $\eta \leq 0$, přičemž nemusí být tato zatížení stejně vzdálené od středu smyku,

Součinitel C je možné stanovit pomocí následujících interakčních vztahů:

$$\frac{M_q + M_F}{C} = \frac{M_q}{C_q} + \frac{M_F}{C_F} \quad (6)$$

nebo
$$C = \frac{M_q + M_F}{\frac{M_q}{C_q} + \frac{M_F}{C_F}} \quad (7)$$

kde

M_q je ohybový moment v podpoře pouze od rovnoměrného zatížení q

M_F je ohybový moment v podpoře pouze od bodového zatížení F

C_q je součinitel C stanovený pouze pro rovnoměrné zatížení q (z Tab. 3.1)

C_F je součinitel C stanovený pouze pro bodové zatížení F (z Tab. 3.2)

a pružný kritický moment M_{cr} obdržíme z rovnice (1).

Poznámka: Tyto interakční vztahy poskytují dobré výsledky (méně než 3% na straně bezpečné) pro zatížení *se stejným* $\eta \geq 0$, neboli obě zatížení působí v jedné úrovni a mají destabilizující efekt (viz [3]). Pro ostatní případy mohou být výsledky více konzervativní.

Válcované I profily za tepla: návrhové pomůcky pro $M_{cr,0}$ a κ_{wt}

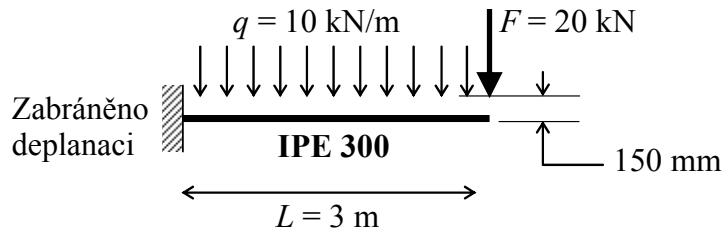
Pomocí návrhových pomůcek mohou být velice jednoduše za použití Tab. 3.4. vypočteny hodnoty $M_{cr,0}$ a κ_{wt} pro běžně používané za tepla válcované I profily. *Je zapotřebí ovšem věnovat pozornost jednotkám (vyjádřeným v závorkách).*

Tab. 3.4 $M_{cr,0}$ a κ_{wt} pro všeobecně používané za tepla válcované I nebo H profily

$$M_{cr,0}(\text{kNm}) = \frac{M^*}{L(\text{m})} \qquad \kappa_{wt} = \frac{k^*}{L(\text{m})} \qquad (8)$$

n°	IPE		IPEA		HEA		HEAA		HEB		HEM	
	M*	k*	M*	k*	M*	k*	M*	k*	M*	k*	M*	k*
80	9,98	0,210	6,93	0,241	-	-	-	-	-	-	-	-
100	17,95	0,276	13,07	0,309	108,6	0,358	62,44	0,416	161,3	0,308	676,8	0,195
120	28,42	0,365	19,81	0,419	152,6	0,529	86,22	0,629	271,8	0,420	1041	0,265
140	42,98	0,459	28,87	0,549	230,7	0,693	128,0	0,864	430,4	0,539	1519	0,343
160	64,35	0,534	42,41	0,640	355,4	0,817	225,8	0,986	683,3	0,631	2191	0,416
180	90,12	0,635	60,96	0,756	479,6	1,027	319,9	1,201	982,6	0,759	2968	0,505
200	129,3	0,696	90,06	0,815	686,6	1,155	477,7	1,313	1413	0,865	3989	0,589
220	176,7	0,806	128,1	0,924	967,0	1,327	636,2	1,539	1912	1,000	5152	0,687
240	247,9	0,869	183,7	0,986	1391	1,432	896,4	1,643	2602	1,109	9273	0,690
260	-	-	-	-	1797	1,599	1193	1,808	3268	1,257	11234	0,790
270	335,6	1,072	249,0	1,225	-	-	-	-	-	-	-	-
280	-	-	-	-	2230	1,811	1495	2,054	3991	1,428	13359	0,900
300	451,9	1,275	342,4	1,439	3006	1,911	1983	2,146	5160	1,538	21417	0,900
320	-	-	-	-	3561	1,906	2160	2,196	5911	1,544	22286	0,931
330	610,9	1,356	475,0	1,508	-	-	-	-	-	-	-	-
340	-	-	-	-	3987	1,929	2346	2,249	6471	1,573	22328	0,981
360	809,2	1,477	648,7	1,662	4441	1,948	2543	2,295	7059	1,599	22231	1,028
400	1064	1,579	827,6	1,796	5216	2,009	2890	2,442	8041	1,669	22177	1,127
450	1373	1,753	1074	2,002	6226	2,101	3130	2,640	9312	1,761	22282	1,254
500	1793	1,907	1430	2,158	7338	2,176	3383	2,820	10684	1,840	22247	1,375
550	2351	1,994	1881	2,266	7992	2,304	3901	2,901	11481	1,957	22356	1,504
600	3069	2,115	2494	2,389	8677	2,421	4198	3,053	12311	2,066	22324	1,626
650	-	-	-	-	9394	2,528	4511	3,189	13174	2,167	22431	1,753
700	-	-	-	-	10252	2,598	5018	3,294	14194	2,242	22398	1,871
800	-	-	-	-	11256	2,822	5928	3,404	15388	2,450	22690	2,096
900	-	-	-	-	12947	2,968	7135	3,553	17382	2,596	22755	2,327
1000	-	-	-	-	13907	3,185	8028	3,705	18516	2,795	22964	2,567

4. Příklad



Obr 4.1 Kombinace q a F

Pro IPE 300 : $h = 300$ mm and $t_f = 10,7$ mm $\Rightarrow h_s = 300 - 10,7 = 289,3$ mm

$$Z \text{ Tab. 3.4} \quad M^* = 451,9 \quad \Rightarrow \quad M_{cr,0} = 451,9 / 3 = 150,6 \text{ kNm} \quad (z (8))$$

$$k^* = 1,275 \quad \Rightarrow \quad \kappa_{wt} = 1,275 / 3 = 0,425 \quad (z (8))$$

Pouze pro konstantní zatížení q : $\eta = 150 / (289,3 / 2) = +1,04$ (destabilizační efekt)
(z (4))

$$M_q = 10 \times 3^2 / 2 = 45 \text{ kNm}$$

Z Tab. 3.1 Po interpolaci mezi hodnotami C pro $\kappa_{wt} = 0,4$ a $\kappa_{wt} = 0,6$, a hodnoty C pro $\eta = 1$ a $\eta = 1,25$, obdržíme : $C_q = 2,09$

Pouze pro bodové zatížení F : $\eta = +1,04$ a $M_F = 20 \times 3 = 60$ kNm

Z Tab. 3.2 Po interpolaci mezihodnotami C pro $\kappa_{wt} = 0,4$ a $\kappa_{wt} = 0,6$, a hodnotami C pro $\eta = 1$ a $\eta = 1,25$, obdržíme : $C_F = 1,11$

$$Z (7): \quad C = \frac{45 + 60}{\frac{45}{2,09} + \frac{60}{1,11}} = 1,39$$

$$Z (1): \quad M_{cr} = 1,39 \times 150,6 = 209,3 \text{ kNm}$$

Pro tento příklad jsou výsledky z programu *LTBeam* (viz oddíl 6): $M_{cr} = 210,2 \text{ kNm}$ (rozdíl činí : -0,4%).

5. Informace o freewarovém programu *LTBeam* pro řešení obecných LTB problémů

V rámci posledního Evropského výzkumného projektu [1] byl vyvinut softwarový program *LTBeam* určený pro řešení stabilitních problémů na přímých prutech. Tento software používá techniku diskretizace pro jednotlivé části prutu a řeší specifický problém vlastních tvarů. *LTBeam* umožňuje různé možnosti zadání koncových a mezilehlých podpor (bodových či liniových podpor, tuhých či pružných působících i mimo střed smyku) a různé zatěžovací podmínky (opět aplikované i mimo střed smyku). Ačkoliv se v programu využívají knihovny předem zadaných profilů, je možné pracovat s jakýmkoliv průřezem. Plná verze programu *LTBeam* je k dispozici zdarma na webovských stránkách CTICM (www.cticm.com). Krátká prezentace tohoto software v anglickém jazyce je v kapitole 7.3 v [1], nebo detailnější popis ve francouzském jazyce naleznete ve [2].

6. Literatura

- 1 ECSC Steel RTD Programme “*Lateral Torsional Buckling In Steel And Composite Beams*” N° 7210-PR-183 (1999-2002) – Final Technical Report – Book 2 : “*Design Guide*” – Chapters 3 and 7.3
- 2 Y. Galéa – “*Moment critique de déversement élastique de poutres fléchies : présentation du logiciel LTBeam*” – Revue Construction Métallique n°2-2003 – CTICM
- 3 Y. Galéa – “*Moment critique de déversement élastique de poutres consoles*” – Revue Construction Métallique n°3-2005 – CTICM
- 4 Swedish Manual on Buckling – “*Knäckning vippning och buckling*” – St BK-K2 – Statens Stålbyggnadskommitté – 1973 – In Swedish

Quality Record

RESOURCE TITLE	NCCI : Elastic critical moment of cantilevers		
Reference(s)			
ORIGINAL DOCUMENT			
	Name	Company	Date
Created by	Yvan GALEA	CTICM	16/06/05
Technical content checked by	Alain BUREAU	CTICM	16/06/05
Editorial content checked by	D C Iles	SCI	15/07/05
Technical content endorsed by the following STEEL Partners:			
1. UK	G W Owens	SCI	30/06/05
2. France	A Bureau	CTICM	30/06/05
3. Germany	C Müller	RWTH	30/06/05
4. Sweden	A Olsson	SBI	30/06/05
5. Spain	J Chica	Labein	30/06/05
Resource approved by Technical Coordinator	G W Owens	SCI	09/05/06
TRANSLATED DOCUMENT			
This Translation made and checked by T. Vraný		CVUT v Praze	28/7/07
Translated resource approved by:	F. Wald	CVUT v Praze	28/9/07
National technical contact	F. Wald	CTU in Prague	